



Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{array} \right\}$$

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre real k .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = 0$.

[1 punt]

2. A \mathbb{R}^3 , siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π .

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = x e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

[1 punt]

4. Responen a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat

$$A^2 + A = 2I, \text{ en què } I \text{ és la matriu identitat, } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1 punt]

b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I .

[1 punt]

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A = (x, 0, 1)$, $B = (0, x, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, x, 0)$, amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A , B , C i D amb l'expressió

$$\frac{1}{6} |\det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

6. Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k , dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

