Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.
Cada qüestió val 2 punts.
Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos s'ha de poder seguir la resolució que fa l'estudiant i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial, la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. **Penalització per errades de càlcul:**
   - Si l'errada de càlcul que es comet no té més transcendència, aleshores es descomptarà 0,125 punts de la puntuació parcial que correspongui.
   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà la penalització fruit de l'errada (0,125 punts).
   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima serà la parcial corresponent i es descomptaran els 0,125 punts.
   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades es descomptaran 0,25 punts del que s'estigui resolent i no es valorarà la resta de l'apartat. En cap cas un apartat tindrà una puntuació negativa.

1. Siguin la recta $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q.

[1 punt]

Resolució:

a) La recta que ens demanen tindrà per vector director el vector normal del pla determinat per la recta r i el punt P, és a dir el producte vectorial d'un vector director de la recta r i un vector que uneixi el punt P amb un punt de r.

Si $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ aleshores un vector director de r és $v_r = (1,1,-2)$ i un punt de la recta és el $R = (5, 0, -2)$.

Un vector que uneix el punt i la recta és $\overrightarrow{PR} = R - P = (5, 0, -2) - (1, 0, -1) = (4, 0, -1)$.

Per tant, un vector normal al pla i director de la recta que se'ns demana és:

$$v = (1, 1, -2) \times (4, 0, -1) = \begin{vmatrix} i & 1 & 4 \\ j & 1 & 0 \\ k & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -7, -4) \sim (1, 7, 4)$$

Així doncs, la recta solució és

$$\boxed{(x, y, z) = Q + \lambda v = (2,1,1) + \lambda(1,7,4) = (2 + \lambda, 1 + 7\lambda, 1 + 4\lambda)}$$

b) Un punt qualsevol de la recta r és: $R = (5 + k, k, -2 - 2k)$. Aquest punt ha de complir

$$d(P, R) = d(Q, R)$$

$$\|(4 + k, k, -1 - 2k)\| = \|(3 + k, k - 1, -3 - 2k)\|$$

$$\sqrt{(4 + k)^2 + k^2 + (-1 - 2k)^2} = \sqrt{(3 + k)^2 + (k - 1)^2 + (-3 - 2k)^2}$$

Fent càlculs s'obté $\boxed{4k + 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel punt R i el vector v_r de la recta r.

0,25 punts pel vector $\overrightarrow{PR}$.

0,25 punts pel producte vectorial.

0,25 punts per l’equació final.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament de la igualtat entre distàncies.

0,25 punts pel càlcul de les normes (o normes al quadrat) dels vectors.

0,25 punts per la resolució de l’equació.

0,25 punts pel punt solució.

2. Tres nombres, x, y i z, compleixen que a) el primer és la suma dels altres dos i b) el segon és la meitat del primer més el doble del tercer.

a) Comproveu que el problema de calcular els nombres x, y i z té una infinitat de solucions.

[1 punt]

b) Trobeu una expressió general de les solucions.

[1 punt]

Resolució:

a) Si denotem per *x, y* i *z* els tres nombres, l'enunciat ens diu:

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = \frac{1}{2}x + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, es tracta d'un sistema homogeni en què el rang *A* = 2 = rang *A'* < 3 = nombre d'incògnites. Per tant és un sistema compatible indeterminat amb (3-2=1) una infinitat de solucions, que és el que l'enunciat demana que es comprovi.

b) Si resolem per Gaus tenim $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$.

Per tant les solucions es poden escriure de la forma general $\boxed{\begin{cases} x = 6 \cdot p \\ y = 5 \cdot p \\ z = p \end{cases}}$

Observació: Es donarà per bo qualsevol mètode de resolució correcta.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la formulació del sistema.

0,25 punts per la presentació matricial del sistema

0,25 punts per la discussió del sistema.

Apartat b)

0,5 punts per la resolució del sistema.

0,5 punts per la formulació general de les solucions.

3. Voleu fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i capacitat de 80 cm^3. Per a la tapa i la superfície lateral feu servir un determinat material que costa 1 €/cm^2, però per a la base heu d'utilitzar un material un 50 % més car.

a) Si denoteu per x la mesura en cm del costat de la base, comproveu que la funció preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5\, x^2 + \frac{320}{x}$.

[1 punt]

b) Calculeu les dimensions d'aquest envàs perquè el preu sigui el menor possible.

[1 punt]

Resolució:

a) Si anomenem x el costat de la base i y l'altura de l'envàs, la funció a optimitzar és: $P(x,y) = 1\cdot\left[x^2 + 4x\cdot y\right] + 1{,}5\cdot x^2$

De la condició $80 = x^2\cdot y \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$ i la funció a optimitzar queda

$$\boxed{P(x) = x^2 + 4x\cdot\frac{80}{x^2} + 1{,}5\cdot x^2 = 2{,}5\cdot x^2 + \frac{320}{x}}$$

b) Per tal de minimitzar la funció preu, derivem i igualem a zero per calcular els possibles extrems:

$P'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$, que és on s'assoleix un mínim ja que

$P''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$ i s'obté $P''(4) > 0$.

El valor de l'altura del prisma és $y = \frac{80}{4^2} = 5$

Per tant les dimensions del prisma buscat són 4 cm de base i 5 cm d'altura.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la funció preu en funció de x i y.

0,25 punts per la lligadura a partir del volum.

0,25 punts per la funció preu en funció de x.

Apartat b)

0,25 punts per la funció derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la funció derivada segona i classificació del punt singular com a mínim.

0,25 punts per les mides finals del prisma.

4. Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver fet l'apartat anterior suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).

[1 punt]

Resolució:

a)

$$y = \sin(x)\,, y' = \cos(x)$$

Calculem les dues rectes tangents:

En $x = 0$, $y = \cos(0)\,(x - 0) + \sin(0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.

En $x = \pi$, $y = \cos(\pi)\,(x - \pi) + \sin(\pi) \Rightarrow \boxed{y = -x + \pi}$.

Per trobar el punt en què es tallen resolem la igualtat entre les dues rectes

$$x = -x + \pi$$

$$2x = \pi$$

$$x = {}^{\pi}/_{2} \Rightarrow y = x = {}^{\pi}/_{2}$$

Així doncs, les rectes es tallen en el punt $\boxed{({}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2})}$

b)

Les dues rectes es tallen en $x = \pi/2$ i com que la funció $y = \sin(x)$ és còncava entre $x = 0$ i $x = \pi$, les rectes tangents estan per sobre de la gràfica.

Així doncs,

$$Area = \int_0^{\pi/2} (x - \sin x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi - \sin x)\, dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (x - \sin x)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2 \quad u^2}.$$

Observació: No és necessari aprofitar la simetria de la regió. Per tant l'exercici es puntuarà igualment si l'estudiant calcula separadament cadascuna de les àrees.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la derivada.

0,25 punts per una recta tangent.

0,25 punts per l'altra recta tangent.

0,25 punts pel punt d'intersecció.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació de les integrals a calcular.

0,25 punts per les primitives.

0,25 punts per la regla de Barrow.

0,25 punts pel càlcul final.

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'única matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$ i comproveu que A i $A - I$ no són invertibles.

[1 punt]

b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, I, i que satisfà la propietat $A^2 = A$, aleshores les matrius A i $A - I$ no són invertibles.

[1 punt]

Resolució:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ a & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{a+1}{4} \end{pmatrix}$$

Quan igualem a la matriu A obtenim el sistema

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{a+1}{4} & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & = & \dfrac{1}{4} \\ a & = & a \\ \dfrac{a+1}{4} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

És a dir, $\frac{a+1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$

I tenim $A - I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Observem que ni A ni $A - I$ són invertibles ja que totes dues tenen determinant 0.

b) Si $A^2 = A$ aleshores $A^2 - A = 0$, és a dir $A(A - I) = 0$. Anem a demostrar que cap de les dues matrius poden ser invertibles.
Si A fos invertible aleshores $A^{-1}A(A - I) = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow A - I = 0 \Rightarrow A = I$!!
Si $A - I$ fos invertible aleshores $A(A - I)(A - I)^{-1} = 0 \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow A = 0$!!

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts pel plantejament i resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió de A i A-I.

0,25 punts per veure que ni A ni A-I són invertibles.

Apartat b)

0,5 punts per la prova que A no és invertible.

0,5 punts per la prova que A-I no és invertible.

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.

[1 punt]

b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3. Raoneu si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que dos plans siguin perpendiculars, el vector normal a un d'ells ha de ser director de l'altre, per tant, el pla que busquem tindrà per vectors directors els vectors normals de cadascun dels plans i té per equació cartesiana:

$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, o sigui $\boxed{3x - 7y + 2z = 2}$.

b) Si n_1, n_2 i n_3 són els vectors normals del respectius plans, el que tenim és que

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$
$$n_2 \cdot n_3 = 0$$

que no implica, necessàriament, que $n_1 \cdot n_3 = 0$

L'apartat anterior n'és una mostra:
$\pi_1 : 3x + y - z = 1$

$\pi_2 : 3x - 7y + 2z = 2$

$\pi_3 : x + y + 2z = 5$, en què veiem que es compleix:

$\pi_1 \perp \pi_2$; $\pi_2 \perp \pi_3$, i l'angle que formen π_1 i π_3 no és 90º ja que el producte escalar dels vectors normals és $(3,1,-1)\cdot(1,1,2) = 3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$.

Per tant, $\boxed{\text{no necessàriament els plans } \pi_1 \text{ i } \pi_3 \text{ han de ser perpendiculars entre ells.}}$

Observació: no cal referir-se a l'exemple de l'apartat a). Una bona il·lustració gràfica (per exemple del cas de dos plans paral·lels tallats per un de perpendicular comú) acompanyat del raonament és més que suficient.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel plantejament del determinant.

0,5 punts pel càlcul del determinant i l'equació final.

Apartat b)

0,5 punts per les hipòtesis inicials i la no implicació de la perpendicularitat.

0,5 punts per un exemple numèric o gràfic (aquesta part pot no ser necessària si l'argumentació anterior és prou sòlida, i aleshores es puntuaria amb tot el punt sencer).